有限深さの低在波 : 特に深さが大きい時の振舞いについて(波の非線形現象の数理とその応用)

岡村, 誠

数理解析研究所講究録
949巻 1996年 238-243

有限深さの定在波ー特に深さが大きい時の振舞いについてー

九大応力研　　岡村　誠（OKAMURA Makoto）

有限深さの定在波を振幅展開によって解析的に求める．最も興味のある結果は有限深さの定在波の4次の係数のうちの一つの深さ無限大の極限が無限深さの定在波の結果と一致しないことである．

1．問題の定式化

水の波の基礎方程式は

$$\Delta\phi = 0, \qquad -h \le y \le \eta, \tag{1}$$

$$\phi_y = 0, \qquad \text{for} \qquad y = -h, \tag{2}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + gy = 0, \qquad \text{on} \qquad y = \eta(x,t), \tag{3}$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x = \phi_y, \qquad \text{on} \qquad y = \eta(x,t), \tag{4}$$

とかける．ここでϕは速度ポテンシャル，ηは表面変位，xとyは水平，垂直方向の空間座標，gは重力加速度，hは深さである．粘性や表面張力は無視している．ここではすでに定在波の波数K，振動数ωによって以下のように無次元化がなされているものとする．

$$K(x,y,h,\eta) \to (x,y,h,\eta), \qquad \omega t \to t, \qquad \frac{K^2}{\omega}\phi \to \phi, \qquad \frac{K}{\omega^2}g \to g. \tag{5}$$

こうしておくと時間空間ともに2π周期の定在波を求めればよい．未知数である振動数はgに含まれている．また以下の条件も満たされているとする．

$$\int_0^{\pi} \eta(x,t)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{6}$$

$$\phi(x,y,t) = \phi(x+2\pi,y,t), \tag{7}$$
$$\phi(x,y,t) = \phi(-x,y,t), \tag{8}$$
$$\phi(x,y,t) = \phi(x,y,t+2\pi), \tag{9}$$
$$\phi(x,y,t) = -\phi(x,y,-t), \tag{10}$$
$$\phi(x,y,t) = -\phi(\pi-x,y,\pi-t). \tag{11}$$

基礎方程式 (1), (2) と上の条件を満たす速度ポテンシャルは

$$\phi(x,y,t) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=2-\mathrm{mod}(k,2)}^{N} A_{kj} \cos kx \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \sin jt + A_0 t, \tag{12}$$

とかける．ここで，$\mathrm{mod}(k,2)$はkを 2 で割った余りである．Nは展開の最大次数で，A_{kj}，A_0は展開係数である．解析的に求める時には，A_{kj}，A_0をさらに微小量で展開する．また$k+j$が奇数の時には$A_{kj}=0$である．パラメーターϵ（波高）は

$$\epsilon = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{2}, \tag{13}$$

とする．ここで，$\eta_{\max}$，$\eta_{\min}$は$t=0$での表面変位の最大値と最小値である．

2．十分深い場合の定在波

深さを有限として求めた定在波は，その深さをどんどん大きくしていったら，はじめから深さを無限大とした定在波に近づくべきである．とこ

ろが，(12) のように展開しただけでは両方の結果は一致しない．その一致しない係数は振幅展開の 4 次までの結果では A_{42}だけである．他の係数は深さをどんどん大きくしていった結果と，はじめから深さを無限大とした結果はちゃんと一致する．有限深さの場合，問題となる係数 A_{42}は

$$A_{42}(h) = -\frac{q^4(1+6z^2+z^4)(81+162z^2-846z^4+412z^6+117z^8-54z^{10})}{6144z^8(3+z^2)}, \tag{14}$$

となる．ここで zは

$$z \equiv \tanh h, \tag{15}$$

で，qは

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\eta(0,0)-\eta(\pi,0)}{2} \\ &= q + \frac{3q^3(9+21z^2+16z^4-25z^6+z^8+2z^{10})}{256z^6}, \end{aligned} \tag{16}$$

によって，波高ϵが与えられたら決まる．深さ無限大の $A_{42}(\infty)$ は例えば Aoki[1)]によると

$$A_{42}(\infty) = -q^4/96 \tag{17}$$

と与えられている．(14) の結果からは

$$\lim_{h\to\infty} A_{42}(h) = \frac{q^4}{24} \neq A_{42}(\infty), \tag{18}$$

となる．こんなことが起こる原因をみていこう．

Schwartz と Whitney[2)]は深さ無限大の定在波では $A_{42}(\infty)$ は「共鳴」と関係する最低次の係数であると述べている．つまり，$A_{42}(\infty)$ は 4 次の係数なのだが，4 次では決まらず，6 次で決まるのである．ここのところをもう少し詳しく述べよう．話を有限深さの場合にしておく．すると A_{42}を求める式は 4 次のところで

$$f(h)A_{42}(h) = g(h)q^4 \tag{19}$$

のような形をしている．Schwartz らの言っていることは，$f(\infty)=g(\infty)=0$ となり，この式から $A_{42}(\infty)$ は決まらないということである．これは共鳴と言っても通常の共鳴ではなく，外力項 $g(h)$ も 0 になってしまうものである．ところが，有限深さの場合には (19) から $A_{42}(h)$ が決まるのである．さらに，その結果で深さ h をどんどん大きくしていくと，有限確定値を持ってしまうのである．つまり，

$$\lim_{h\to\infty} A_{42}(h) = \lim_{h\to\infty} \frac{g(h)}{f(h)} q^4 = \frac{q^4}{24} \tag{20}$$

しかし，残念ながらこの極限値は $A_{42}(\infty)$ とは一致しない．どこが，おかしいのだろうか？

4 次のところで (19) を求めた時に $f(h)$ や $g(h)$ は $O(1)$ と仮定している．ところが，深さ h が $h \gg 1$ の時には

$$f(h) \sim g(h) \sim \exp(-2h) \ll 1, \tag{21}$$

となり，上の仮定を満たしていない．深さ無限大の場合に $A_{42}(\infty)$ が 6 次で決まったことを考えると

$$\exp(-2h) = O(q^2) \tag{22}$$

とおくとよさそうである．深さにこのような仮定をして定在波を求めると 6 次のところで注目している係数は

$$a_{42}(h) = \frac{q^4(-q^2 + 32\exp(-2h))}{96(q^2 + 8\exp(-2h))}. \tag{23}$$

と求まる．ここでは $A_{42}(h)$ のかわりに $a_{42}(h)$ と表記している．

この係数の $h\to 0$ と $h\to\infty$ の極限を考えよう．qの 4 次までの範囲では

$$a_{42}(0) = \frac{q^4}{24} = \lim_{h\to\infty} A_{42}(h), \tag{24}$$

$$a_{42}(\infty) = -\frac{q^4}{96} = A_{42}(\infty), \tag{25}$$

となり，$a_{42}(h)$ は $A_{42}(h)$ と $A_{42}(\infty)$ のギャップを埋めている．図 1 にこれらの深さ依存性が描かれている．ここでは数値的に有限深さの定在波を求める方法を説明していないが，弱非線形の上の結果と比べるために図にのせている．

破線------は (14) の結果を，実線——は (23) の結果を，点●は数値計算による結果を示している．(23) の結果と数値計算による結果は $h > 3$ で良く合っている．これは (22) の仮定からもっともである．

参考文献

1) H. Aoki (1980)*J. Phys. Soc. Jpn.* **49**, 1598–1606.

2) L. W. Schwartz & A. K. Whitney (1981) *J. Fluid Mech.***107**, 147–171.

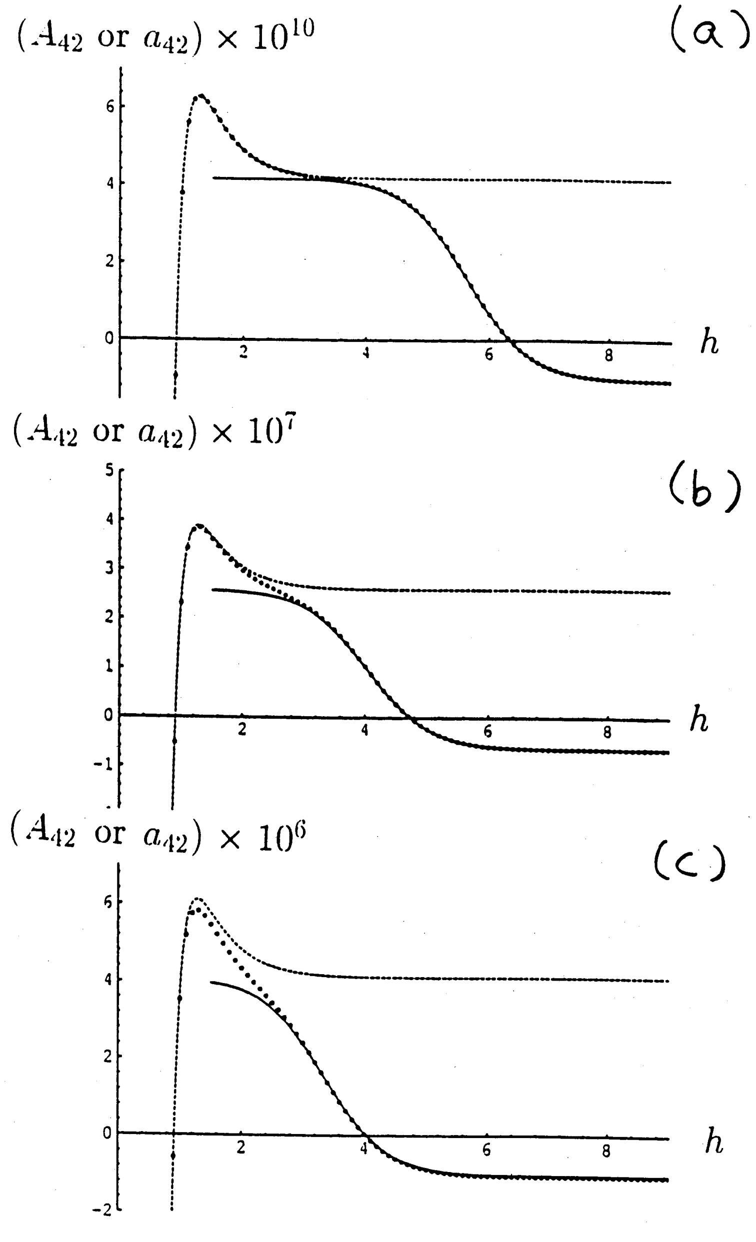

図 1: 係数 a_{42}, A_{42}の深さ h の依存を図示. (a)$\epsilon = 0.01$, (b)$\epsilon = 0.05$, (c)$\epsilon = 0.1$. - - - - - は (14) の $A_{42}(h)$; ——は (23) の $a_{42}(h)$; ●は数値計算による $A_{42}(h)$